Estudos em história da filosofia árabe e islâmica

Volume III, parte 2

Fontes, influências e temas centrais

Tadeu M. Verza
Meline C. Sousa
(orgs.)

Editora
PPGFIL
UFMG

Estudos em história da filosofia árabe e islâmica

Volume III, parte 2

Fontes, influências e temas centrais

Tadeu M. Verza
Meline C. Sousa
(orgs.)

Editora
PPGFIL
UFMG

https://www.edppgfil.fafich.ufmg.br
https://www.editorappgfilufmg.com
Avenida Presidente Antônio Carlos, 6627
FAFICH, sala 4047, 4º Piso
Pampulha, Belo Horizonte - MG.
CEP: 31270-901

Ficha catalográfica

E82	Estudos em história da filosofia árabe e islâmica [recurso eletrônico] / Tadeu M. Verza, Meline C. Sousa (orgs.) - Belo Horizonte : PPGFIL-UFMG, 2025. 1 recurso online (303 p.) : pdf Inclui bibliografias. ISBN: 978-65-01-37058-3 DOI: 10.5281/zenodo.14984420 1.Filosofia árabe – História. 2. Filosofia islâmica - História. 3. Filósofos - Biografia I. Verza, Tadeu Mazzola. II. Sousa, Meline Costa. CDD: 181.92 CDU: 19 (55)

Ficha catalográfica elaborada por Vilma Carvalho de Souza - Bibliotecária - CRB-6/1390

CRÉDITOS DO E-BOOK

CAPA E PROJETO GRÁFICO

Amí Comunicação & Design

Esta obra foi selecionada pelo Conselho Editorial do Selo PPGFIL/UFMG após avaliação por pareceristas ad hoc.

Sumário

Filosofia da matemática árabe e islâmica[1]

Mohammad Saleh Zarepour

A filosofia da matemática pura lida com dois grandes grupos de questões. Um diz respeito à ontologia de entidades matemáticas e o outro à epistemologia de conceitos e julgamentos matemáticos (Avigad 2007). A natureza e a existência de objetos matemáticos (por exemplo, números e formas geométricas), a existência e qualificações de infinitos (por exemplo, magnitudes infinitas e coleções infinitas de números ou coisas numeradas) e a existência e qualificações de contínuos são algumas das questões ontológicas mais significativas com as quais os filósofos da matemática estão preocupados. Por outro

[1] Tradução de Eduardo Dias de Carvalho Filho.
Publicado em 9 de abril de 2022. O texto a seguir é a tradução do verbete de Mohammad Saleh Zarepour, *Arabic and Islamic Philosophy of Mathematics*, publicado na *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. A tradução segue a versão do verbete nos arquivos da SEP em https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/arabic-islamic-phil-math/. Essa versão pode ser diferente da versão atual do verbete, que pode ter sido atualizada desde o momento dessa tradução. A versão atual está localizada em https://plato.stanford.edu/entries/arabic-islamic-phil-math. Gostaríamos de agradecer ao autor e aos editores da *Stanford Encyclopedia of Philosophy* pela permissão para traduzir e publicar esse verbete.

lado, algumas das questões epistemológicas mais importantes e desafiadoras sobre matemática são as seguintes: os mecanismos pelos quais apreendemos o conhecimento matemático, o *status* epistêmico dos axiomas e princípios matemáticos, a natureza das provas matemáticas (que podem ser escritas no papel) e sua conexão com o que se passa na mente dos matemáticos, e o papel do conhecimento matemático em atingir uma melhor compreensão do mundo físico.

Sabe-se muito bem que a civilização islâmica medieval desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento histórico dos aspectos técnicos da matemática. Apoiados nos ombros de seus ancestrais pré-islâmicos gregos, indianos e persas, os matemáticos muçulmanos fizeram inúmeras inovações em vários ramos da matemática e escreveram um grande número de livros e ensaios introduzindo noções matemáticas e provando teoremas matemáticos (Al-Daffa' 1977; R. Rashed 1984b [1994]; 1996 [2012]; 2015; Berggren 2016). Entretanto, é muito difícil (se não impossível) encontrar um livro da era islâmica medieval que seja exclusivamente dedicado a um estudo abrangente e sistemático da filosofia da matemática. Não obstante, muitas das questões filosóficas acima mencionadas sobre matemática foram abordadas por grandes pensadores medievais muçulmanos em várias obras cujo assunto central era matemática, física, metafísica ou mesmo teologia (*kalām*). Colocando esses engajamentos dispersos juntos, fica claro que, embora a filosofia da matemática nunca tenha sido tratada como uma disciplina independente no mundo islâmico medieval, os pensadores muçulmanos surgiram com ideias, *insights* e argumentos muito interessantes e profundos sobre pelo menos algumas questões filosóficas relacionadas à matemática. Esta entrada analisa brevemente os exemplos mais notáveis de tais *insights* e argumentos, alguns dos quais têm sido objeto de debates e discussões de longa data entre pensadores muçulmanos. Consequentemente, os trabalhos matemáticos técnicos de estudiosos árabes e muçulmanos serão discutidos apenas na medida em que contenham materiais relacionados à *filosofia* da matemática.

1. Ontologia da matemática

1.1 O que os objetos matemáticos não são

Traços das visões filosóficas de Pitágoras e Platão sobre a natureza dos objetos matemáticos podem ser encontrados nas obras dos primeiros pensadores muçulmanos. Isso pode ser parcialmente devido às primeiras traduções árabes de obras de matemáticos pitagóricos e platônicos. A maioria dos matemáticos da tradição de Nicômaco, Proclo e Jâmblico eram pitagóricos e platônicos (Endress

2003). Algumas de suas obras mais importantes foram traduzidas para o árabe e influenciaram matemáticos e filósofos muçulmanos. Por exemplo, a *Introdução à aritmética* de Nicômaco foi traduzida para o árabe por Ḥabīb Ibn Bahrīz (m. no início do século IX) do siríaco e por Thābit Ibn Qurra (m. 901) do grego (Brentjes 2022: sec. 1). A inspiração das abordagens pitagórica e platonista à filosofia da matemática é facilmente detectável, por exemplo, nas obras dos Irmãos da Pureza (*Ikhwān al-ṣafāʾ*) e dos primeiros mutazilitas (The Brethren of Purity [*Epistles*] [*Epístolas*]; Endress 2003: 132–33; Marquet 2006; Fazlıoğlu 2014: 2; El-Bizri 2018; Baffioni 2022). As principais características do pitagorismo e do platonismo em relação à ontologia da matemática podem ser capturadas pelas seguintes teses (Zarepour 2019: 198):

> **Separabilidade de Objetos Matemáticos (SM):** Objetos matemáticos são substâncias imateriais independentes, totalmente separadas (*mufāriq*) da matéria e dos objetos materiais.
>
> **Principado dos Objetos Matemáticos (PM):** Objetos matemáticos são os princípios (*mabādiʾ*) das coisas naturais. Objetos matemáticos têm algum tipo de primazia sobre formas naturais, o que torna as últimas dependentes dos (ou fundamentadas nos, ou causadas pelos) primeiros.

Platão estava comprometido com ambas as teses. Em contraste, os pitagóricos endossaram apenas a última tese. É assim pelo menos se confiarmos no relato de Aristóteles (*Metafísica* 987b23-987b25). Embora o pitagorismo considere os números como as causas e princípios de todas as outras coisas existentes, ele não trata os números como entidades que são necessariamente separadas da matéria (Zhmud 1989; De Smet 2022). Da nossa perspectiva hoje, isso é até certo ponto surpreendente porque, comparada a (PM), (SM) parece desfrutar de mais plausibilidade *prima facie*. Mas precisamente por causa da presença de fortes tendências ao pitagorismo no pensamento islâmico inicial (Brentjes 2022), (PM) foi mais explicitamente defendida do que (SM). Em todo caso, a crítica brutal de Avicena a essas duas teses (junto com sua crítica mais geral à teoria platônica de formas universais separadas) tornou o pitagorismo e o platonismo extremamente impopulares na filosofia pós-aviceniana. Na *Metafísica de "A Cura"*, Avicena (m. 937) argumenta contra (SM) e (PM) não apenas rejeitando argumentos atribuídos aos defensores dessas duas teses (Avicenna [Mph]: cap. VII.2), mas também desenvolvendo seus próprios argumentos positivos contra elas (Avicenna [MPh]: cap. VII.3).

De acordo com um argumento que Avicena atribui aos defensores de (SM), por um lado, os objetos matemáticos são separados em definição (ou em mente). Eles podem ser definidos (ou concebidos) sem referência a matéria ou a seres materiais. Por outro lado, tudo o que é separado em definição (ou em mente) é separado em existência. Portanto, o argumento conclui, os objetos matemáticos são separados em existência. Eles existem como seres totalmente separados que não têm associação com matéria ou com seres materiais (Avicenna [MPh]: cap. VII.2, sec. 5). Entretanto, Avicena acha esse argumento deficitário. Ele argumenta que há uma diferença entre (a) definir (ou conceber) algo sem a condição de materialidade e (b) definir (ou conceber) algo com a condição de imaterialidade. Ele diz que os objetos matemáticos são separados em definição apenas no sentido de (a). Mas a segunda premissa do argumento em discussão é verdadeira apenas se a separação em definição for considerada no sentido de (b). O mero fato de que algo pode ser definido sem a condição de materialidade não implica que essa coisa possa existir no reino extramental totalmente separada de matéria. Mas objetos matemáticos não podem ser definidos com a condição de imaterialidade. Não é plausível supor a imaterialidade como um componente essencial das definições de objetos matemáticos, ou assim afirma Avicena. Assim, esse argumento é falacioso e não pode estabelecer (SM) (Avicenna [MPh], cap. VII.2, secs. 16-17; Marmura 2006: 360-63; Porro 2011: 292-93; Zarepour 2019: sec. 4.1).

Um argumento simples que Avicena atribui aos defensores de (PM) é o seguinte: objetos matemáticos são separados. Em outras palavras, (SM) é verdadeiro. Além disso, os princípios (ou causas) de coisas materiais não podem ser eles próprios materiais. Eles devem ser separados. Portanto, objetos matemáticos são os princípios de coisas materiais (ou naturais) (Avicenna [MPh]: cap. VII.2, sec. 7). Avicena pensa que esse argumento não apenas é insustentável devido à falsidade de (SM), mas também inválido. Mesmo se aceitarmos que objetos matemáticos são separados e que os princípios de coisas naturais devem ser separados, não podemos concluir validamente que objetos matemáticos são os princípios de coisas naturais. Pode haver outras coisas não matemáticas separadas que formam os princípios de seres naturais. O argumento em questão é válido apenas se pressupormos que objetos matemáticos são os únicos existentes separados. Mas isso é algo para o qual não temos provas. Portanto, esse argumento não consegue estabelecer (PM) (Avicenna [MPh]: cap.

VII.2, sec. 21; Marmura 2006: 365-66; Porro 2011: 294; Zarepour 2019: sec. 4.2).

O próprio argumento de Avicena contra a separatividade ou imaterialidade dos objetos matemáticos pode ser resumido da seguinte forma: existem alguns objetos matemáticos no mundo sensível. Caso contrário, não poderíamos compreender seus conceitos (e.g., os conceitos TRIÂNGULO, CÍRCULO, DOIS, etc.) (Avicenna [MPh]: sec. VII.3, sec. 1). Agora, se também existem alguns objetos matemáticos totalmente separados (inteiramente à parte do mundo sensível), então esses dois grupos de objetos matemáticos (sensíveis/não-separados e não-sensíveis/separados) devem compartilhar essências e definições semelhantes (Avicenna [MPh]: cap. VII.3, sec. 2). Caso contrário, não há como conhecer objetos materiais separados. Isso ocorre porque não parece que temos qualquer acesso direto a um reino de objetos matemáticos totalmente imateriais (isso nos lembra do desafio epistemológico de Benacerraf (1973) ao platonismo matemático). Mesmo que tais coisas existam, nós as conhecemos apenas através da mediação de conhecer suas contrapartes sensíveis. Não temos justificativa para a existência de objetos matemáticos separados que não têm contraparte sensível no mundo material. Mas isso deixa injustificada a alegação de que objetos matemáticos podem ser essencialmente imateriais e separados. Avicena toma esse argumento como estabelecendo que (SM) é implausível (Avicenna [MPh], cap. VII.3, sec. 3; Zarepour 2019: sec. 5). Veremos mais tarde que esse argumento revela aspectos interessantes dos relatos de Avicena sobre a epistemologia e a ontologia da matemática.

Por fim, Avicena argumenta que mesmo que objetos matemáticos separados existam, eles não podem ser os princípios (ou causas) de coisas naturais. Parece intuitivamente plausível que se um objeto matemático separado é o princípio de qualquer material existente, ele deve, em primeiro lugar, ser o princípio de sua própria contraparte sensível. Note que, de acordo com Avicena, a alegação de que um objeto matemático separado, digamos um triângulo, existe não pode ser justificada a menos que o tenhamos conhecido por meio do conhecimento de uma contraparte sensível dele que existe no mundo material. Agora, se esse triângulo separado é a causa de qualquer coisa material, ele deve, em primeiro lugar, ser o princípio de sua própria contraparte sensível, ou assim acredita Avicena. Mas se o triângulo sensível é causado pelo triângulo separado, então podemos legitimamente perguntar por que o primeiro precisa do último. É ou a essência ou (alguns dos) acidentes do triângulo sensível que o tornam dependente de sua contraparte separada. Entretanto, se for devido à essência do triângulo sensível, então o próprio triângulo separado precisa de um princípio. Isso ocorre porque os triângulos separados e sensíveis compartilham a mesma essência. Assim, se é a essência do triângulo sensível que o faz precisar do triângulo separado, então o triângulo separado (tendo a mesma essência que sua contraparte sensível) deve ser causado por outro triângulo separado. Repetindo a mesma linha de argumentação, podemos concluir que deve existir uma cadeia infinita de triângulos causalmente conectados. Uma vez que tais regressões infinitas são inaceitáveis, o que faz um objeto matemático sensível precisar de sua contraparte separada não é sua essência compartilhada. Mas também é impossível que (alguns dos) acidentes de um objeto matemático sensível o tornem dependente de sua contraparte separada. Os acidentes do objeto sensível não existem a menos que esse objeto em si exista. Mas também é assumido que o objeto sensível em si não existe a menos que o objeto separado exista. Isso significa que o objeto separado tem algum tipo de prioridade explicativa sobre os acidentes do objeto sensível. Portanto, os acidentes de um objeto matemático sensível não podem explicar, de forma não circular, por que esse objeto precisa de sua contraparte separada (Avicenna [MPh]: cap. VII.3, sec 4). Assim, parece que não há justificativa convincente para o porquê de um objeto matemático separado dever ser a causa de sua contraparte sensível, muito menos a causa (ou princípio) de qualquer outra coisa natural. Avicena toma esse argumento como refutação de (PM).

Esses argumentos mostram que objetos matemáticos não são entidades separadas totalmente desvinculadas do mundo sensível nem são as causas das coisas naturais. A refutação de Avicena do platonismo e do pitagorismo em relação aos objetos matemáticos foi tão convincente e influente que essas abordagens desapareceram quase completamente na filosofia pós-aviceniana. Isso ocorreu apesar da forte presença de elementos pitagóricos e/ou platônicos em outros aspectos (i.e., não matemáticos) da filosofia de alguns pensadores pós-avicenianos, como Suhrawardī (m. 1191) (Walbridge 2000; De Smet 2022). Os detalhes de algumas críticas avicenianas de (SM) e (PM) – que geralmente eram tomadas como partes auxiliares da crítica geral de Avicena à explicação platônica das formas universais – foram, é claro, criticados por filósofos posteriores (Arnzen 2011; Benevich 2019). Essas críticas não reviveram o platonismo matemático e/ou o pitagorismo na filosofia islâmica pós-aviceniana. Dito isso, as discussões sobre a fraqueza e a força dos argumentos a favor e contra o platonismo matemático continuaram a ser de interesse dos filósofos pós-avicenianos. Talvez a obra mais importante na qual tais argumentos são coletados seja um livro, intitulado *The Platonic Intelligible Forms* [As Formas Inteligíveis Platônicas], escrito entre 1329 e 1339, por um autor desconhecido (veja o texto árabe do livro em Badawī 1947: 1-145, e sua tradução alemã em Arnzen 2011: Apêndice 1).

1.2 O que são objetos matemáticos

Agora que sabemos o que os objetos matemáticos não são para os filósofos muçulmanos, devemos então perguntar o que eles são. Em sua *Metafísica* (VI.1, 1026a13-19), Aristóteles classifica diferentes ciências teóricas com base no *status* ontológico dos objetos que estudam (Cleary 1994). Os principais critérios de Aristóteles para distinguir diferentes ciências umas das outras são a extensão e a qualificação da associação do assunto das ciências com o movimento e a materialidade. Empregando uma abordagem semelhante, em seu *Os objetivos da Metafísica de Aristóteles* (*Maqāla fī aghrāḍ kitāb mā baʿd al-ṭabīʿa*), al-Fārābī (m. 950) argumenta que os assuntos da matemática – i.é., objetos matemáticos – são abstraídos (*mujarrad*) da matéria em estimativa (*wahm*), mas não no mundo extramental. Por um lado, os objetos matemáticos são diferentes dos objetos que a metafísica estuda porque os últimos objetos são totalmente separados da matéria tanto em estimativa quanto no mundo extramental. Por outro lado, os objetos matemáticos são diferentes dos objetos físicos sensíveis porque não podem ser separados da matéria, nem em estimativa nem no mundo extramental. Assim, a matemática ocupa uma posição intermediária entre a metafísica e a física. A associação dos objetos matemáticos com a matéria é mais forte do que a dos objetos da metafísica, mas mais fraca do que a dos objetos da física. (O árabe original do livro de al-Fārābī pode ser encontrado em al-Fārābi 1890: 34-38, e Kiankhah 2015: 147-57. Para duas traduções em inglês, veja Bertolacci 2006: 66-72, e McGinnis & Reisman 2007: 78-81.)

Em sua *Enumeração das ciências* (*Iḥṣāʾ al-ʿulūm*), al-Fārābī apresenta uma discussão mais detalhada da ontologia da matemática. Ele distingue matemática aplicada/prática (*amalī*) de matemática pura/teórica (*naẓarī*). Os objetos da aritmética aplicada são números, pois estão associados a coisas sensíveis. A aritmética aplicada considera o número de coisas sensíveis existentes no mundo material. Em contraste, a aritmética pura considera uma concepção absoluta de número e pluralidade. Ela estuda números que são abstraídos de todas as coisas numeradas no mundo sensível. Da mesma forma, a geometria aplicada considera as propriedades geométricas de objetos físicos específicos, enquanto a geometria pura lida com formas geométricas, independentemente de estarem ou não ligadas a objetos físicos específicos (al-Fārābi [Enum]: cap. 3; Endress 2003: 139-40).

Seguindo a linha principal da abordagem de al-Fārābī, Avicena desenvolve uma discussão mais detalhada da divisão das ciências (Marmura 1980; Gutas 2003) segundo a qual objetos matemáticos existem no mundo extramental em associação com espécies determinadas de matéria (e.g., madeira, ouro, etc.). Por meio da função da faculdade de estimativa, objetos matemáticos na mente podem ser abstraídos das espécies específicas de matéria às quais estão ligados no mundo extramental. Não obstante, eles ainda devem ser concebidos como coisas materiais. Em outras palavras, objetos matemáticos na mente são separados de espécies determinadas de matéria, embora não da materialidade em si (Avicenna [MPh]: cap. I.2; Di Vincenzo 2021: 20-27). Avicena argumenta que os números (*aʿdād*) e as grandezas (*maqādīr*) – como os representantes mais gerais dos objetos da aritmética e da geometria, respectivamente – são acidentes (*aʿrāḍ*) e propriedades de objetos físicos existentes no mundo sensível (Avicenna [MPh]: cap. III.3-4). Nem números nem magnitudes têm subsistência imaterial independente no mundo extramental. Magnitudes (ou formas geométricas, para ser mais específico) não podem ser separadas da materialidade, mesmo na mente (Avicenna [MPh]: cap. III.4 sec.2 e VII.2, sec. 21). Em contraste, números podem ser considerados totalmente separados da matéria e da materialidade. Não obstante, tal consideração de números é metafísica, em vez de matemática (Endress 2003: 142; Zarepour 2016: sec. 4). Números, na medida em que estão sujeitos a estudos matemáticos, devem ser receptivos à diminuição e ao aumento. Portanto, mesmo na mente, eles devem ser concebidos como propriedades de coisas materiais (Avicenna [MPh]: cap. I.3, secs. 17-19). Em suma, objetos matemáticos existem no mundo extramental como propriedades de coisas físicas constituídas de espécies determinadas de matéria. Objetos matemáticos podem ser abstraídos dessas espécies determinadas de matéria na mente. Mas eles ainda devem ser pensados como propriedades de coisas materiais. Caso contrário, eles não podem ser objeto de estudos matemáticos. A discussão de Avicena sobre os papéis da faculdade de estimativa e o processo de abstração em estudos matemáticos foi interpretada de duas maneiras diferentes. Alguns estudiosos (McGinnis 2006; 2017; Ardeshir 2008; Fazlıoğlu 2014; Tahiri 2016; 2018) pensam que objetos matemáticos são, em primeiro lugar, objetos mentais, e a abstração é um mecanismo para construir objetos matemáticos. Atribuindo uma visão literalista a Avicena, alguns outros (Marmura 1980; 2005; Zarepour 2016; 2021; McGinnis 2019) argumentam que objetos matemáticos existem literalmente no mundo físico e a abstração é um processo cognitivo para apreender conceitos matemáticos, em vez de produzir objetos matemáticos. Essas diferentes interpretações nos lembram do contraste entre as leituras literalista (Mueller 1970; 1990) e abstracionista (Lear 1982; Hussey 1991) da ontologia da matemática de Aristóteles. A objeção mais óbvia à visão literalista é que, diferentemente dos objetos físicos, que são inexatos e imperfeitos, os objetos matemáticos parecem ser perfeitos e exatos (ou idealizados). Por exemplo, parece que não existe nenhum objeto físico perfeitamente circular cuja circunferência não seja (pelo menos em uma extensão modesta) serrilhada. Para refutar essa objeção contra a leitura literalista da ontologia da matemática de Avicena, foi argumentado que ele endossa a existência de objetos matemáticos perfeitos no mundo físico (Zarepour 2016: sec. 5; 2021: sec. 4).

É provavelmente devido à ênfase de Avicena e al-Fārābī no papel da estimativa (*wahm*) na concepção de objetos matemáticos que, na filosofia pós-aviceniana, a matemática é frequentemente referida como uma ciência estimativa (*wahmī* ou *mawhūm*) (Pines 1974). Anteriormente ou contemporaneamente a Avicena, muitos pensadores muçulmanos enfatizaram que os objetos matemáticos existem, de uma forma ou de outra, no mundo físico. Por exemplo, no *Livro da instrução* (*Kitāb al-tafhīm* ([Instr]), al-Bīrūnī (m. ~1048) defende um relato da natureza dos objetos matemáticos que parece ter fortes afinidades com a leitura literalista de Avicena (Samian 2011; 2014). Na mesma linha, Ibn al-Haytham (m. 1040), nas primeiras páginas de sua *Resolução de dúvidas* (*Ḥall shukūk*, [Doubts] [Dúvidas]), argumenta que objetos geométricos existem no mundo sensível. Eles podem ser abstraídos da matéria por meio da atividade da faculdade da imaginação (*takhayyul*), cuja função na teoria da mente de Ibn al-Haytham é muito semelhante à função de estimativa na psicologia de Avicena. Entretanto, em contraste com Avicena e Aristóteles (*De anima* 428a5-18), Ibn al-Haytham pensa que formas imaginadas, que são abstraídas de objetos físicos, têm uma existência mais real. Para ele, a existência real (*ḥaqīqī*) de objetos matemáticos é instanciada na imaginação e na distinção (*tamyīz*) – outra faculdade cognitiva na filosofia da mente de Ibn al-Haytham, que desempenha um papel crucial na compreensão de conceitos universais por meio da mediação de formas imaginadas. (Ver Ighbariah & Wagner 2018: secs. 79-81. R. Rashed [1993: 2:8-19] acredita que havia dois pensadores muçulmanos diferentes chamados 'Ibn al-Haytham'. Sabra [1998; 2003] rejeita a visão de Rashed e aqui eu sigo a posição de Sabra.)

Na filosofia pós-aviceniana, a afirmação de que os objetos matemáticos são mentais (ou estimativos ou imaginativos) tornou-se a visão mais popular e foi cada vez mais enfatizada por diferentes pensadores. A inclinação para essa abordagem foi parcialmente devido a críticas poderosas ao relato de Avicena sobre a ontologia da matemática. Por exemplo, Suhrawardī ofereceu fortes objeções à existência de números no mundo físico como acidentes de coisas sensíveis. Considere um grupo de quatro indivíduos. Avicena pensa que a quatro-idade (*arbaʿīya*) é um acidente dessas quatro pessoas. Mas Suhrawardī acha isso insustentável. Ele argumenta que

> ou a 'quatreidade' deve ser completa em cada um dos indivíduos, o que não é o caso, ou então deve haver algo de quatro-idade em cada um, o que só pode ser a unidade. Portanto, ou a totalidade da quatro-idade não deve ter outro *locus* além do intelecto, ou então nem a quatro-idade nem nada de quatro-idade pode estar em cada um. Nessa última suposição, também, a quatro-idade está apenas no intelecto. (Suhrawardī *The Philosophy of Illumination* [*A Filosofia da iluminação*] [1999: 48])

Ele acredita que é somente nossa mente que pode impor uma unidade a uma pluralidade de quatro entidades sensíveis distintas. Não há nada no mundo extramental que possa naturalmente ligar quatro coisas separadas de tal forma que elas coletivamente aceitem o acidente da quatreidade. Assim, para Suhrawardī, os números (e objetos matemáticos em geral) são somente coisas dependentes da mente (*iʿtibārī*) (Ziai 1990: 108; Walbridge 2000: 63 e 78-79). Uma linha de argumentação similar é desenvolvida por Mullā Ṣadrā (m. 1640). Ele aceita que há pluralidades no mundo extramental. Mas ele insiste que é somente através da atividade de nossa mente que um grupo de objetos distintos pode ser considerado uma unidade. Não há nada no mundo extramental que confira unidade a um grupo arbitrário de objetos distintos (Mullā Ṣadrā, *Al-Shawāhid al-rubūbīya*, [1982: 65]). Essa linha de argumentação contra a consideração de números como propriedades de objetos físicos nos lembra da crítica de Frege a essa ideia (Frege 1884: §§ 21-25).

Um ponto de virada na interpretação de objetos matemáticos como objetos mentais é apelar à noção de *nafs al-ʾamr* para descrever o *status* ontológico de objetos matemáticos e esclarecer a natureza dos criadores de verdades de proposições matemáticas. A frase '*nafs al-ʾamr*' significa literalmente *a coisa em si*. Mas seu conteúdo técnico é difícil de capturar na tradução. Embora essa frase também apareça nos escritos de Avicena, é provavelmente Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (m. 1274) quem usou a frase pela primeira vez em um sentido técnico e carregado de teoria. Diferentes filósofos entenderam essa frase como se referindo a coisas diferentes, incluindo conhecimento divino, o Intelecto Ativo, o reino das ideias, etc. (Kaş 2021; Spiker 2021). O significado da teoria de *nafs al-ʾamr* para a filosofia da matemática é que ela pode nos permitir preservar o realismo de julgamento mesmo sem o realismo de objeto. Alguns filósofos (e.g., Sayyid al-Sharīf al-Jurjānī, m. 1413) usaram essa teoria para mostrar que, embora os objetos matemáticos sejam meramente estimativos (*wahmī*) e não tenham existência independente da mente, os julgamentos matemáticos são certos (*yaqīnī*), e seus valores de verdade são independentes da mente. Em outras palavras, em relação à matemática, o realismo de julgamento ainda pode ser defendido mesmo quando o realismo de objeto é rejeitado (Fazlıoğlu 2014; Hasan 2017).

Outra questão importante pertinente à ontologia da matemática é a natureza dos objetos algébricos. Uma incógnita algébrica (ou uma variável algébrica, como a chamamos hoje) pode se referir indiferentemente a um número ou a uma magnitude geométrica. Então, a natureza de um objeto algébrico não é a mesma nem de números nem de formas geométricas. Infelizmente, a ontologia híbrida desse tipo especial de objetos matemáticos raramente foi (se é que foi) discutida como uma ontologia diferente daquelas de números e magnitudes. Mas tem sido argumentado que a familiaridade de filósofos como al-Fārābī e Avicena com a teoria algébrica apresentada por al-Khwārizmī (m. 850) em seu *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* os inspirou a desenvolver uma ontologia geral das coisas (*ashyāʾ*) que não é nem platônica nem aristotélica (R. Rashed 1984a; 2008; 2015: 716-18; 2018).

1.3 Infinito

O problema do infinito é um dos tópicos filosóficos relacionados à matemática que foi mais amplamente discutido na filosofia islâmica medieval. Existem muitos tratados que argumentam que nenhum número pode ser infinito. Por exemplo, em resposta a uma série de questões levantadas por Abū Mūsā ʿĪsā Ibn Usayyid, Thābit Ibn Qurra discute a natureza dos números e argumenta que não há número infinito. Além disso, ele mostra que os conjuntos infinitos de números podem ser de tamanhos diferentes (Pines 1968; Sabra 1997; Mancosu 2009: sec. 2; M. Rashed 2009; Zarepour 2020b: sec. 4.2). Yaḥyā Ibn ʿAdī (m. 974), em seu *Tratado sobre o infinito* (*Maqala fī ghayr al-*

mutanāhī), fornece um conjunto diferente de argumentos para estabelecer que o infinito não é previsível em números (McGinnis 2010: sec. 3). Mas os três argumentos a seguir para o finitismo são provavelmente os mais discutidos na tradição islâmica:

(1) *O argumento da colimação* (*burhān al-musāmita*)*:* Considere a linha L que começa do centro O de um círculo C, intercepta a circunferência de C, e se estende infinitamente. Suponha, além disso, que haja uma linha distinta L' que é paralela a L e infinitamente estendida em ambas as direções. Agora suponha que L começa a rotacionar em torno de O e se aproxima de L', enquanto L' está imóvel e fixa. Como resultado, L e L' se interseccionam. Então, há um momento em que as duas linhas são paralelas e há um momento em que elas se interseccionam. Portanto, deve haver um momento de tempo T e um ponto P sobre L' em que as duas linhas se interseccionam pela primeira vez, ou assim diz o argumento. Mas obviamente não existem tais T e P. Para todo T em que L e L' são interseccionadas, podemos encontrar um momento anterior do tempo T'' (i.e., $T'' < T$) em que as duas linhas já estavam interseccionadas. Então, parece que temos uma contradição. Por um lado, deve haver um primeiro momento de intersecção (ou tal é a expectativa dos defensores do argumento). Por outro lado, não pode haver tal momento. Portanto, a suposição inicial do argumento – que é a existência de linhas infinitas – deve ser rejeitada. Não há magnitude unidimensional infinita e, consequentemente, nenhuma magnitude infinita em geral.

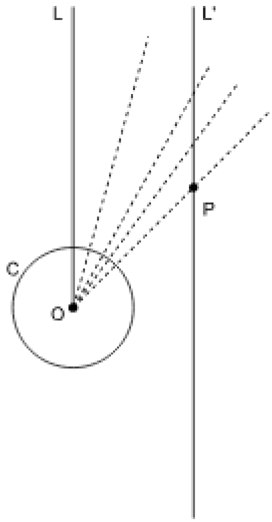

FIGURA 1

Uma variação do cenário acima – que provavelmente se originou do *De caelo* de Aristóteles (I.5, 272a8-20) – foi proposta por Abū Sahl al-Qūhī (m. 1000) para rejeitar o dogma aristotélico de que uma distância infinita não pode ser percorrida em um tempo finito. Isso ocorre porque o argumento acima mostra que *L* pode atravessar *L′* em um período finito de tempo igual à metade do tempo de rotação de *L* em torno de *O* por uma rodada (R. Rashed 1999; McGinnis 2010: sec. 3). Em contraste, Avicena emprega o Argumento da Colimação em certos lugares (Avicenna *Al-Najāt* [1985: 233-44]; [Ph1]: cap. II.8, [8]) para rejeitar a possibilidade de movimento circular em um vazio infinito, e em outros lugares (Avicenna *ʿUyūn al-ḥikma*, cap. 3, 20) para rejeitar a infinitude real de magnitudes (Zarepour 2020b: sec. 3.1; R.

Rashed 2016: 302-6; 2018: sec. 11.2). O Argumento da Colimação é criticado por, entre outros, Abū al-Barakāt al-Baghdādī (m. 1165) em seu *Al-Muʿtabar* (vol. 2, 83-84 e 86), al-Ṭūsī em seu *Talkhīṣ al-Muḥassal* ([1985: 217]) e al-Ḥillī (m. 1325) em seu *Nihāya al-marām fī ʿilm al-kalām* (vol. 1, 256-258). O argumento também é defendido por, entre outros, Fakhr al-Dīn al-Rāzī (m. 1209) em seu *Al-Mabāḥith al-mashriqīya* (vol. 1, 196) e Mullā Ṣadrā em seu *Asfār* (vol. 4, 21-23).

(2) *O argumento da escada* (*burhān al-sullam*): Se linhas infinitas podem existir, então pode haver um ângulo agudo cujos lados são infinitos. Suponha que *AB* e *AC* são duas linhas infinitas que se interseccionam em *A* e façam tal ângulo agudo. *AB* e *AC* estendem-se infinitamente nas direções de *B* e *C*, respectivamente. Agora considere linhas paralelas $B_i C_i$ (para inteiros $i \geq 1$) que interseccionam *AB* e *AC* de modo que a distância entre cada duas linhas consecutivas seja igual à distância de $B_1 C_1$ de *A*. Assim, cada linha é maior que a linha anterior por um comprimento fixo, digamos *d* (i.e., para todo inteiro $i \geq 1$, $B_{i+1} C_{i+1} - B_i C_i = d$). Agora considere *BC*. Ela está mais longe do que qualquer $B_i C_i$ está de A. Por isso, *BC* é mais longa do que qualquer $B_i C_i$. Isso indica que *BC* deve ser realmente infinita. No entanto, *BC* está confinada entre duas linhas (i.e., *AB* e *AC*). Termina em *B* e *C*. Portanto, deve ser finita também. Consequentemente, *BC* deve ser finita e infinita. Isso é impossível. Então, a suposição inicial sobre a qual construímos o argumento é falsa. Nenhuma linha infinita (e, *a fortiori*, nenhuma magnitude infinita) pode existir (R. Rashed 2016; 2018: sec. 11.2; Zarepour 2020b: sec. 3.2).

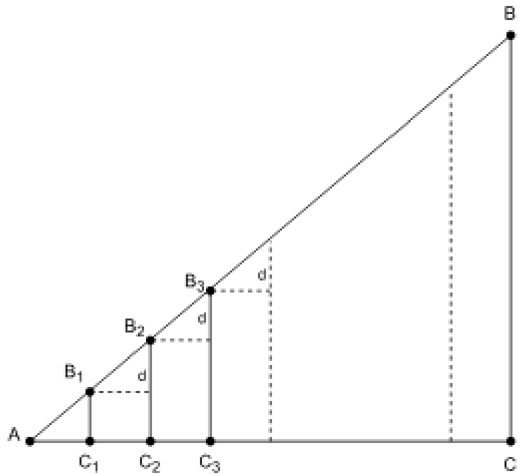

FIGURA 2

O argumento da escada é uma reabilitação de um argumento aristotélico apresentado em *De caelo* (I.5, 271b26-272a7). Avicena discute esse argumento na *Física de "A Cura"* (Avicenna [Ph2]: cap. III.8, [7]). O argumento tem sido objeto de um debate de longa data na filosofia pós-aviceniana (McGinnis 2018). O argumento foi criticado, entre outros, por Abū al-Barakāt em seu *Al-Muʿtabar* (vol. 2, 84-86) e Najm al-Dīn al-Kātibī al-Qazwīnī (m. 1277) em seu *Ḥikma al-ʿayn* ([2002: 38-39]). Por outro lado, as defesas do Argumento da Escada podem ser encontradas, entre outros, no comentário de al-Ṭūsī sobre *Indicações e lembretes* de Avicena (em Avicenna [*Pointers*] [*Indicações*]: namaṭ I, 183-191) e no comentário de Mullā Ṣadrā sobre o *Hidāya* de al-Abharī (*Sharḥ Al-Hidāya al-Athīrīya*, 65-69).

(3) *O argumento do mapeamento* (*burhān al-taṭābuq ou al-taṭbīq*)*:* Considere uma linha efetivamente infinita *AC* que começa a partir de *A* e se estende infinitamente na direção de *C*. Remova um segmento finito *AB* do início de *AC*. Suponha que *B**C* é uma cópia de (e, consequentemente, do mesmo comprimento que) *BC*. Compare o tamanho de *B**C* com *AC* mapeando a primeira sobre a última de modo que as duas linhas sejam paralelas e *B** esteja bem na frente de *A*. *B**C* deve estender-se infinitamente na direção de *C**. De outra forma, *B**C* seria finita. Isso significa que *BC* seria finita também. Como resultado, *AC* – que é a soma de *BC* com o segmento finito *AB* – seria finita. Uma vez que isso contradiz a suposição inicial de que *AC* é efetivamente infinita, *B**C* deve estender-se infinitamente na direção de *C**. Mas se assim for, então *B**C* e *AC* correspondem entre si, no sentido de que nenhuma parte de uma delas permanece descoberta pela outra. Assim, com base na quarta noção comum do primeiro livro dos *Elementos* de Euclides – segundo a qual as coisas que correspondem umas às outras são iguais entre si ([1908: vol. 1, 155]) – podemos concluir que *AC* é igual a *B**C*. Isso indica que *AC* também seria igual a *BC*, que é propriamente apartada de *AB*. No entanto, a quinta noção comum euclidiana afirma que uma tal igualdade todo-parte é absurda ([1908: vol. 1, 155]). Portanto, *AC* não pode ser igual a *BC*. Consequentemente, a suposição inicial de que *AC* pode ser uma linha realmente infinita deve ser rejeitada. Não pode haver tal magnitude realmente infinita.

FIGURA 3

Versões anteriores do Argumento do mapeamento podem ser encontradas em diferentes lugares da obra de al-Kindī (Rescher & Khatchadourian 1965; Shamsi 1975; Adamson 2007: cap. 4; Zarepour 2020b: n. 52). Versões mais precisas desse Argumento são apresentadas por Avicena (Marmura 1960; McGinnis 2010: sec. 4; Zarepour 2020b). A força e a precisão das versões do argumento que esses pensadores fornecem dependem, pelo menos parcialmente, da precisão de sua interpretação da noção de igualdade de magnitudes geométricas. Foi demonstrado que alguns pensadores muçulmanos têm relatos bastante detalhados desta noção (R. Rashed 2019).

Assim como os outros dois argumentos, o objetivo principal do argumento do mapeamento é mostrar que nenhuma magnitude contínua infinita realmente existe. Tendo lido os *Elementos* de Euclides (livros 7-9), os pensadores muçulmanos sabiam que os números poderiam ser facilmente representados por magnitudes. Portanto, qualquer argumento para a impossibilidade de magnitudes infinitas pode ser tomado como um argumento contra a infinidade de números. Mas e quanto a coleções infinitas? Nenhum dos três argumentos é diretamente aplicável a coleções infinitas de entidades discretas. Não obstante, foi argumentado que Avicena provavelmente estava ciente de que o Argumento do mapeamento poderia ser modificado para que fosse aplicável a coleções infinitas de coisas numeradas discretas (Zarepour 2020b: sec. 4). Os tamanhos de duas coleções de entidades discretas podem ser comparados empregando a própria noção de "mapeamento" que usamos anteriormente no caso de magnitudes contínuas. Entretanto, no caso das coleções de entidades discretas, essa noção deve ser descontada em termos de correspondência um-para-um entre os elementos das duas coleções em questão. Duas coleções de entidades discretas correspondem uma à outra se todo membro de uma coleção puder ser pareado com um (e apenas um) membro da outra, de modo que nenhum membro de nenhuma dessas coleções permaneça desemparelhado. Avicena parece ter conhecimento de que uma coleção infinita de entidades discretas pode ser colocada em correspondência um-para-um com algumas de suas sub-coleções próprias. E ele acha isso tão absurdo quanto a correspondência de uma magnitude infinita com sua sub-magnitude própria. Ele menciona explicitamente que o Argumento do mapeamento pode descartar as possibilidades de magnitudes infinitas e coleções infinitas de entidades discretas (e.g., números e coisas numeradas). Entretanto, ele próprio não explicita como esse argumento realmente funciona no caso de coisas discretas. Ele não fornece nenhum exemplo concreto da aplicação do Argumento do mapeamento ao caso das coleções infinitas de objetos. Tal exemplo pode ser encontrado nas obras de filósofos pós-avicenianos como Fakhr al-Dīn al-Rāzī (*Sharḥ ʿuyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt* [1994: 53]). Al-Ghazālī (m. 1111) mencionou o Argumento do Mapeamento em seu *Maqāṣid* ([2000: 97-98]) e a transmissão mais antiga desse argumento para a tradição latina é provavelmente por meio da tradução latina de *Maqāṣid* no terceiro quarto do século XII.

Esses argumentos são geralmente discutidos no contexto da física. Isso ocorre porque eles são concebidos em primeiro lugar para mostrar que nenhum infinito pode realmente existir no mundo físico. Mas se, endossando o literalismo, considerarmos objetos matemáticos como propriedades de objetos físicos, então a impossibilidade da existência de infinitos reais no mundo físico implica a impossibilidade de linhas geométricas infinitamente estendidas e conjuntos infinitos de números. Mas aqueles que rejeitam o literalismo sobre a ontologia da matemática têm visões diferentes sobre a aplicabilidade de tais argumentos a objetos matemáticos. Por exemplo, Fakhr al-Dīn al-Rāzī acredita que o Argumento do mapeamento não pode rejeitar a infinitude da coleção de números naturais porque ele [o autor] toma os objetos matemáticos como entidades dependentes da mente e totalmente imateriais (*Sharḥ ʿuyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt* [1994: 53-57]). Embora possamos apelar ao Argumento do mapeamento para rejeitar a existência de uma coleção infinita de objetos físicos distintos no mundo extramental, esse argumento não pode rejeitar a existência de um número infinito de objetos dependentes da mente, como números, ou assim al-Rāzī parece acreditar (Zarepour 2020b: 4.1).

Curiosamente, alguns filósofos muçulmanos argumentaram que até mesmo a mente tem suas próprias limitações em termos de percepção de coisas infinitas. Por exemplo, Ibn al-Haytham acredita que, embora possamos imaginar linhas finitas de qualquer comprimento arbitrário (i.e., independentemente de quão longas elas sejam), não podemos imaginar uma linha realmente infinita.

Consequentemente, embora possamos imaginar uma linha finita maior que o tamanho do universo, não podemos conceber uma linha realmente infinita. Ibn al-Haytham afirma que infinitos reais não existem nem no mundo extramental e nem mesmo na mente (Masoumi Hamedani 2013; Ighbariah & Wagner 2018: 80).

1.4 Continuidade

As visões dos pensadores muçulmanos sobre o *continuum* matemático estão interligadas com a posição que eles defendem no debate entre atomismo e hilomorfismo sobre a natureza do mundo físico. Para Avicena, não há lacuna entre o mundo físico e o reino dos objetos matemáticos. É assim pelo menos se aceitarmos as interpretações de Avicena como um literalista sobre a ontologia da matemática. Ele acredita que as magnitudes geométricas são contínuas no sentido de que não têm parte efetiva. Correspondentemente, as dimensões físicas são contínuas e não têm partes efetivas. Podemos, é claro, dividir qualquer magnitude contínua em partes menores. No mundo físico, há um limite prático menor para o comprimento das dimensões físicas que podem, na prática, ser divididas em magnitudes menores. Em contraste, em nossa faculdade de estimativa, esse limite desaparece, e todas as magnitudes são potencialmente infinitamente divisíveis. Apesar dessa diferença prática, teoricamente falando não há diferença entre a estrutura das linhas geométricas e as dimensões físicas. Como resultado, a continuidade geométrica implica que o atomismo físico é falso. Na verdade, Avicena apela à continuidade matemática para rejeitar o atomismo físico (Avicenna [Ph2]: cap. III.3-5; Lettinck 1999; Dhanani 2015; McGinnis 2019: sec. 3).

Em contraste com Avicena, há filósofos que endossam a continuidade matemática e o atomismo físico simultaneamente. Por exemplo, Shahrastānī (m. 1153) insiste que o julgamento da faculdade de estimativa não é confiável o suficiente para nos convencer de que as grandezas físicas podem suportar divisões potencialmente infinitas. Ele acredita que as grandezas físicas não são infinitamente divisíveis. O número de suas partes, seja real ou mesmo potencial, é finito. Shahrastānī nos lembra que, embora o tamanho do universo seja imaginável como infinito, os filósofos geralmente rejeitam que o universo seja infinito. Baseando-se em uma abordagem semelhante, Shahrastānī argumenta que, embora toda grandeza seja imaginável como infinitamente divisível, há fortes argumentos que mostram que a faculdade de estimativa está equivocada nesse caso e nenhuma grandeza física é infinitamente divisível. A extensibilidade infinita do tamanho do universo na estimativa é compatível com o universo sendo finito. Da mesma forma, a divisibilidade infinita de magnitudes na estimativa poderia ser compatível com o fato de elas terem apenas um número finito de partes (potenciais) no mundo extramental, ou assim Shahrastānī parece acreditar (al-Shahrastānī *Summa philosophiae*, 513; McGinnis 2019). Isso significa que se tomarmos objetos matemáticos como construções meramente estimativas, então podemos reconciliar a continuidade puramente matemática com o atomismo físico.

Propondo uma modificação sutil, Fakhr al-Dīn al-Rāzī (*Al-manṭiq*, vol. 6, capítulo 6, 63) argumenta contra Demócrito que tudo o que é divisível na imaginação é divisível no mundo extramental. Ele acredita que há um menor limite para o comprimento das magnitudes divisíveis que podemos imaginar. Não é verdade que toda magnitude, não importa quão pequena, seja divisível na estimativa. Ele não rejeita que na geometria euclidiana as magnitudes sejam infinitamente divisíveis. Mas ele parece não aceitar que seja possível fazer uma imagem visual (através da faculdade de estimativa) de toda magnitude sobre a qual podemos falar no contexto da geometria euclidiana. Abraçando o atomismo físico (em seus trabalhos posteriores), al-Rāzī nega que a geometria euclidiana contínua possa representar a estrutura real do mundo extramental (Setia 2006; Eftekhari 2018; 2019). A alegação de que a continuidade não tem realidade além da faculdade de estimativa é frequentemente reafirmada nos trabalhos de atomistas posteriores como ʿAḍūd al-Dīn al-ʾĪjī (m. 1355) (Hasan 2017: 233-35).

2. Epistemologia da matemática

2.1 Compreendendo conceitos matemáticos

A maioria dos pensadores muçulmanos que falaram sobre a epistemologia dos conceitos matemáticos acredita que esses conceitos são formados por meio de alguns mecanismos cognitivos cuja primeira entrada são os dados que recebemos por meio de nossos sentidos externos. Os detalhes de tais mecanismos são explicados de diferentes maneiras por diferentes filósofos, dependendo de sua imagem geral da psicologia cognitiva humana. Por exemplo, Avicena apresenta um experimento mental mostrando que nenhum conceito matemático pode ser apreendido na ausência de percepção sensorial (Avicenna [MPh], cap. VII.3, sec. 1; Zarepour 2019: sec. 5; 2021, sec. 3). Isso indica que Avicena endossa algum tipo de empirismo conceitual sobre matemática. Na interpretação literalista da ontologia da matemática de Avicena, objetos matemáticos existem no mundo sensível como atributos conotacionais não sensíveis (*maʿānī*) de objetos físicos. Como todos os outros atributos conotacionais, entidades matemáticas são percebidas pela faculdade de estimativa. Por exemplo, é a faculdade de estimativa que percebe a dualidade quando vemos dois livros. Em tal experiência, os dados sensíveis coletados pelos sentidos externos seriam transferidos para a faculdade de estimativa por meio da mediação da faculdade do senso comum (*ḥiss mushtarak*). A estimativa nos permite ignorar todas as outras características da experiência que tivemos e perceber a dualidade que não é diretamente acessível aos nossos sentidos externos.

Mesmo na conta literalista da ontologia da matemática, ainda há muitas entidades matemáticas com as quais os matemáticos podem se envolver, mas que não existem no mundo extramental (e.g., uma forma geométrica complexa e extraordinária sem contrapartida no mundo sensível). Avicena acredita que a faculdade da imaginação (*mutakhayyila*) pode construir imagens mentais de tais objetos analisando, sintetizando, separando e combinando as imagens de itens mais simples que foram previamente percebidos e armazenados em nossas faculdades cognitivas (Zarepour 2021: sec. 3). Mas se endossarmos a interpretação abstracionista da ontologia da matemática de Avicena, então *todos* os objetos matemáticos são construções mentais. Não existe nenhum objeto matemático no mundo extramental que possa ser percebido diretamente pela estimativa. Nessa interpretação, a faculdade de estimativa coopera com a faculdade da imaginação para produzir objetos idealizados, nenhum dos quais tem uma contrapartida fora de nossas mentes. São os atos mentais conduzidos por essas faculdades que nos permitem construir formas geométricas e números (Ardeshir 2008; Tahiri 2016; 2018).

Em qualquer caso, uma vez que a estimativa é uma faculdade corporal, ela não pode se envolver com coisas totalmente imateriais. Então, ela percebe entidades matemáticas como coisas associadas à matéria (embora não com espécies específicas dela). Os objetos de estimativa não são conceitos universais inteligíveis. Então, o processo cognitivo de apreender conceitos matemáticos deve ser completado adicionando o Intelecto Ativo à nossa história (Zarepour 2021). Em uma leitura da epistemologia de Avicena (Nuseibeh 1989; Davidson 1992: cap. 4; Goodman 1992 [2006]; Black 2014), o ato da faculdade de estimativa prepara nossa alma para receber os conceitos universais que serão *emanados* pelo Intelecto Ativo. Em outro relato da epistemologia de Avicena (Hasse 2001; Gutas 2012), o Intelecto Ativo é meramente um reservatório de conceitos inteligíveis aos quais encontramos acesso por causa da função preparatória e ineliminável das faculdades internas. Em suma, a aquisição de conceitos matemáticos é um processo que começa com a percepção sensorial e termina com a função do Intelecto Ativo. E entre esses dois estágios, a operação das faculdades internas em geral e das faculdades de estimativa e imaginação em particular é necessária e inescapável.

Imagens muito semelhantes, embora muito menos sofisticadas, do procedimento de apreensão de conceitos matemáticos são apresentadas nas obras dos cientistas contemporâneos de Avicena. Por exemplo, Ibn al-Haytham fala sobre apenas duas faculdades: imaginação (*takhayyula*) e distinção (*tamyīz*). A imaginação é a faculdade que constrói objetos matemáticos idealizados de acordo com as impressões que nos são deixadas por meio de nossas percepções sensoriais. Por exemplo, a imaginação nos permite abstrair magnitudes geométricas dos corpos sensíveis que vemos no mundo externo. Entretanto, a transição das imagens de objetos matemáticos para conceitos matemáticos é algo que deve ser realizado pela faculdade de distinção. Essa faculdade desempenha um papel duplo. Por um lado, contribui para analisar, sintetizar, separar e combinar imagens previamente percebidas (ou produzidas). Esse papel é atribuído a *mutakhayyila* na psicologia de Avicena. Por outro lado, a faculdade de distinção é uma substituição do Intelecto Agente. Na filosofia de Ibn al-Haytham, o passo final da conceituação é realizado pela faculdade de distinção. Foi argumentado que o Intelecto Agente e a luz divina não desempenham nenhum papel significativo na teoria do conhecimento de Ibn al-Haytham (Ighbariah & Wagner 2018).

Desenvolvendo um relato mais ou menos similar ao de Avicena, al-Bīrūnī aceita que algumas entidades matemáticas como linhas e pontos existem no mundo físico, mas não podem ser apreendidas por nossos sentidos externos. Não obstante, os dados que recebemos por meio de nossas experiências sensoriais nos permitem perceber esses objetos e/ou produzir construções idealizadas que não existem no mundo extramental (Samian 2011). Entretanto, ele não parece ter uma imagem clara da psicologia cognitiva na qual os papéis de diferentes faculdades são explicitamente distinguidos. É por isso que ele oscila entre duas imagens, em uma das quais a estimativa (*wahm*) é a primeira faculdade a apreender objetos matemáticos, enquanto na outra, esse papel deve ser desempenhado pelo intelecto (*aql*). Na última visão, nada abaixo do nível do intelecto pode perceber objetos matemáticos. A hesitação de Al-Bīrūnī entre as duas visões rivais se torna mais aparente, especialmente quando aceitamos que as versões persa e árabe de *Kitāb al-tafhīm* foram escritas por ele mesmo. Por exemplo, na versão árabe, ele afirma que os pontos não podem ser concebidos por nenhuma faculdade além do intelecto (al-Bīrūnī [Astro]: 3). Em contraste, na versão persa, ele atribui esse papel à estimativa (al-Bīrūnī [Instr]: 7). Ele não parece considerar nenhuma fronteira clara entre o inteligível (*maʿqūl*) e o estimativo (*mawhūm*).

No contexto das teorias de *nafs al-ʾamr* propostas por pensadores muçulmanos posteriores, os sentidos externos, a estimativa e o intelecto cooperam entre si para nos dar uma concepção de entidades matemáticas como elas são em *nafs al-ʾamr*. Entretanto, o processo através do qual podemos ter acesso e saber sobre o reino de *nafs al-ʾamr* não é de forma alguma menos misterioso do que o papel do Intelecto Agente na filosofia de Avicena.

2.2 Estados epistemológicos dos princípios da matemática

Toda proposição é uma estrutura ordenada constituída de conceitos. Mas para conhecer uma proposição, não basta apenas conhecer seus componentes conceituais. Também precisamos dar mais alguns passos. Seguindo Aristóteles e Euclides, a maioria (se não todos) dos filósofos muçulmanos acredita em relatos fundacionalistas/axiomáticos de epistemologia, segundo os quais todas as instâncias de conhecimento são eventualmente construídas sobre os fundamentos (*mabādi'*) de conceitos e proposições básicos que podem ser conhecidos direta e imediatamente. Conceitos e proposições não básicos podem ser derivados dos básicos por definições (*taʿārīf* ou *ḥudūd*) e silogismos (*qiyāsāt*), respectivamente. Isso significa que, após adquirir os componentes conceituais de uma proposição *P,* ainda precisamos dar os três passos a seguir:

1. ordenar e combinar os conceitos adquiridos para formar *P* como uma unidade estruturada,
2. consentir com a verdade (*taṣdīq*) das proposições fundamentais, e
3. estabelecer a verdade de *P* com alguns silogismos das proposições fundamentais.

Para Avicena, a faculdade da imaginação desempenha papéis cruciais nas etapas (1) e (3). A imaginação nos permite chegar a proposições significativas explorando nosso armazenamento de conceitos previamente apreendidos e combinando-os para fazer várias estruturas ordenadas de conceitos (e examinar se eles formam ou não uma proposição significativa). Além disso, a imaginação nos permite considerar combinações de proposições para encontrar o(s) silogismo(s) (série de consecutivos) adequado(s) que pode(m) nos levar à proposição desejada. A parte mais crucial desse processo é encontrar termos médios adequados para os silogismos que podem nos levar à conclusão desejada. Na filosofia de Avicena, a faculdade da imaginação empreende essa operação de busca. Uma questão imediata sobre essa visão é como a imaginação, como uma faculdade corporal, pode entreter conceitos universais que se supõe serem entidades inteligíveis totalmente imateriais. Várias respostas possíveis para essa questão são investigadas por, entre outros, Gutas (2001), Adamson (2004) e Black (2013). Na filosofia de Ibn al-Haytham, é a faculdade de distinção que desempenha o papel central em relação a (1) e (3). (Mais sobre (3) será dito na próxima seção).

As coisas ficam mais complicadas quando nos voltamos para (2). Seguindo a antiga tradição grega, os filósofos muçulmanos categorizam os princípios fundamentais das ciências demonstrativas em três grupos: noções comuns/axiomas (*al-uṣūl al-mutaʿārafa*), hipóteses (*al-uṣūl al-mawḍūʿa*) e postulados (*muṣādarāt*). Grosso modo, noções comuns são as proposições mais óbvias que podemos conhecer – os primeiros princípios que apreendemos. Hipóteses e postulados não são tão óbvios quanto axiomas. Eles, em princípio, precisam ser provados. Esses dois grupos de princípios são geralmente distinguidos com base na atitude epistêmica do aluno que os está aprendendo. Hipóteses são os princípios fundamentais que parecem plausíveis para o aluno, mesmo que ele não tenha provas para eles. Em contraste, os postulados parecem duvidosos para o aluno, no sentido de que ele pode ter alguns sentimentos e ideias contra a plausibilidade desses princípios. O exemplo mais frequentemente repetido de postulados nas obras de pensadores muçulmanos medievais é provavelmente o postulado das paralelas da geometria euclidiana. Essa classificação é defendida por, entre outros, al-Nayrīzī (m. 922; em Besthorn & Heiberg 1893: 14-26), al-Fārābi (*Al-Manṭiq*, caps. 87-90), Avicena (*al-Burhān*, cap. I.12) e al-Ṭūsī (*Asās al-ʾiqtibās*, cap. V.1.15).

Como hipóteses e postulados matemáticos devem eventualmente ser provados com base em proposições previamente conhecidas, parece que o *status* epistêmico das proposições matemáticas depende, no final, de como apreendemos o mais óbvio desses princípios. Em outras palavras, parece que todas as proposições matemáticas podem ser derivadas de axiomas por meio do mecanismo totalmente *a priori* (= independente da experiência sensorial) do silogismo demonstrativo.

Os pensadores muçulmanos não têm um consenso sobre o *status* epistêmico dos princípios da matemática e os mecanismos cognitivos pelos quais concordamos com a verdade desses princípios. Por exemplo, pode ser demonstrado que, de acordo com Avicena, toda proposição básica da matemática está incluída em *awwalīyāt* (dados primários) ou *fiṭrīyāt* (ou, mais completamente, *muqaddamāt fiṭrīyāt al-qiyās*, que é traduzido como *"data with built-in syllogismes"* ["dados com silogismos embutidos"] por Gutas (2012)). 'O todo é maior que a parte' e 'quatro é par' são dois dos exemplos mais famosos, respectivamente, de *awwalīyāt* e *fiṭrīyāt*. De acordo com Avicena, *awwalīyāt* não têm termos médios e, portanto, nenhum silogismo pode ser feito para demonstrá-los. Eles são muito básicos e óbvios para precisar de uma prova (ou para serem demonstráveis). Assim que compreendemos todos os conceitos dos quais uma proposição *awwalī* é constituída, imediatamente concordamos com a verdade dessa proposição. Essas proposições são autoevidentes e necessárias. Ninguém pode ter uma dúvida racional sobre elas. Ao contrário de *awwalīyāt*, *fiṭrīyāt* têm termos médios e devem ser provados. Entretanto, o silogismo através do qual uma proposição *fiṭrī* deve ser estabelecida é tão simples que assim que o termo menor (i.e., sujeito) e o termo maior (i.e., predicado) são compreendidos, o termo médio aparece na mente e a verdade dessa proposição é assentida. Por exemplo, imediatamente após compreender os conceitos QUATRO e PAR, o conceito DIVISÍVEL POR DOIS aparece em nossa mente e podemos afirmar o fato de que '(todo) quatro é par' através do seguinte silogismo (Mousavian & Ardeshir 2018):

(Todo) quatro é divisível por dois.
(Todo) divisível por dois é par.
Logo:
(Todo) quatro é par.

As verdades de *awwalīyāt* e *fiṭrīyāt* são consentidas por meio da operação natural (*fiṭra*) do intelecto. Então, depois de compreender os componentes conceituais delas, podemos compreender essas proposições sem apelar aos dados que recebemos de nossas experiências sensoriais. Essas proposições são constituídas de conceitos *não a priori*. Mas depois de compreendermos os componentes conceituais delas, essas proposições podem ser justificadas por meio de mecanismos *a priori*. Devemos ser cautelosos, entretanto, para que *a priori* não implique inatismo no sentido de ser dado ao nascer. Avicena rejeita que possuamos qualquer instância de conhecimento proposicional ao nascer. (Para diferentes visões sobre o *status* epistêmico de *awwalīyāt* e *fiṭrīyāt* avicenianos, veja Zarepour 2020a; 2020c; Gutas 2020.)

Relatos mais ou menos semelhantes das proposições básicas da matemática podem ser encontrados em filósofos como al-Fārābi e al-Ṭūsī. Entretanto, tanto alguns contemporâneos de Avicena quanto alguns pensadores pós-avicenianos adotaram uma abordagem mais empírica e/ou mais cética à verdade das proposições matemáticas. Por exemplo, em seu primeiro comentário sobre os *Elementos* de Euclides, *Sharḥ musạ̄darāt*, Ibn al-Haytham segue a visão dominante de que as proposições básicas da matemática são autoevidentes, necessárias e racionalmente indubitáveis. Mas, em seu segundo comentário, *Ḥall shukūk* ([*Doubts*]), ele endossa uma posição mais empírica e argumenta que adquirimos essas instâncias de conhecimento ao lidar com o uso frequente delas na vida diária. Considere, por exemplo, a noção comum de que 'coisas que correspondem umas às outras são iguais umas às outras'. Ibn al-Haytham diz que aceitamos essa proposição porque vimos repetidamente que quando um corpo é mapeado ou superposto a outro corpo e os comprimentos deles não excedem um ao outro, nosso intelecto (*aql*) julga que esses corpos (ou, mais precisamente, seus comprimentos) são iguais. Sem ter tais experiências, não poderíamos chegar a concordar com a verdade desse axioma. Portanto, nosso conhecimento de tais axiomas é um tanto dependente da experiência sensorial (Ibn al-Haytham [*Doubts*] [*Dúvidas*]: 31; R. Rashed 2019).

Em sua *Óptica* (Sabra 1989), Ibn al-Haytham propõe um tratamento interessante do princípio 'o todo é maior que a parte', que tem semelhanças marcantes com o tratamento de Avicena de *fiṭrīyāt*. Ele argumenta que esse princípio pode ser provado através do seguinte argumento:

> O todo excede a parte.
> Tudo o que excede outra coisa é maior que ela.
> Logo:
> O todo é maior que a parte.

As próprias premissas desse argumento devem ser justificadas através da operação do intelecto ou da faculdade de distinção (para usar a terminologia de Ibn al-Haytham) sobre os dados que recebemos através dos nossos sentidos (Sabra 1989: vol. I, 133-34; Ighbariah & Wagner 2018). Os traços dessas atitudes em relação aos axiomas e noções comuns podem ser encontrados nas obras de Fakhr al-Dīn al-Rāzī e alguns *mutakallimūn* posteriores (Morrison 2014: 220-22; Hasan 2017: sec. 2.4.2; Ighbariah e Wagner 2018: 66-68).

2.3 *Ars analytica* e *ars inveniendi*

Vale a pena mencionar que pensadores muçulmanos também desenvolveram teorias interessantes sobre como podemos chegar às proposições desconhecidas da matemática a partir das conhecidas.

Em outras palavras, eles ofereceram relatos detalhados de como o passo (3) – introduzido na seção anterior – pode ser tomado no contexto da matemática em geral e da geometria em particular. Uma questão central nesse contexto era se e como (e até que ponto) o que está acontecendo na mente de um matemático quando ele descobre (ou inventa) uma verdade matemática corresponde ao que ele apresenta como prova dessa descoberta (ou invenção) no papel. Em particular, era importante para os pensadores muçulmanos saber se a ordem dos passos que um matemático toma para descobrir uma verdade matemática é idêntica à ordem dos diferentes estágios das justificativas que ele fornece para essa verdade.

Uma das primeiras tentativas nesse contexto é a teoria da psicologia da invenção matemática de Thābit Ibn Qurra. Entretanto, foi provavelmente seu neto, Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 946), que estabeleceu uma área independente de estudos pertinente às questões acima mencionadas em seu *Sobre o método de análise e síntese nos problemas da geometria* (R. Rashed & Bellosta 2000: cap. I). Ele categoriza problemas geométricos em diferentes grupos com base em diferentes critérios e, fornecendo exemplos concretos, explica como cada grupo de problemas deve ser analisado (*taḥlīl*) e como uma solução para eles pode ser sintetizada (*tarkīb*). Ele destaca os possíveis erros e enganos que alguém pode cometer no processo de análise e síntese e elabora como eles podem ser evitados. A próxima figura importante nessa área é al-Sijzī (m. ~1020), que escreveu um livro *Tratado geométrico sobre resolução de problemas*) sobre diferentes métodos que podem facilitar o procedimento de resolução de problemas em geometria. Mas o trabalho mais maduro entre esses tipos de estudos é talvez *Fī al-taḥlīl wa al-tarkīb* de Ibn al-Haytham (*Sobre análise e síntese*; R. Rashed 2006 [2017: 219-304]). Uma questão interessante discutida nessa área da filosofia da matemática foi a natureza dos problemas indecidíveis; afirmações para cuja verdade ou falsidade não temos provas. Essa questão foi discutida em particular por al-Samawʾal (m. 1180) no contexto da classificação de problemas geométricos em seu *al-Bāhir fī al-jabr*. Seu projeto de classificação pode ser entendido como uma sucessão daquele de Ibn Sinān (R. Rashed 1984b [1994: 41-43]; 2008: sec. 3; 2015: 726-32).

2.4 Aplicabilidade e confiabilidade da matemática

Se tomarmos objetos matemáticos como objetos puramente mentais ou estimativos (*mawhūm*) que são construídos pelo mecanismo de abstração e não têm realidade extramental, então dificilmente é justificável que a matemática e/ou modelos matemáticos por si só possam nos dar conhecimento confiável do mundo extramental. Não deveria ser surpresa que aqueles que endossam uma explicação não platônica e não literalista da ontologia da matemática acharão essa ciência menos certa e talvez menos valiosa do que ciências como a física e a metafísica. É por isso que alguns estudiosos contemporâneos, que leram Avicena como defensor de uma explicação puramente abstracionista da ontologia da matemática, argumentam que, para ele, a matemática é menos útil e inferior às outras duas ciências (Hasan 2017: 225-26; Fazlıoğlu 2014: 11-13). Essa interpretação da visão de Avicena é, obviamente, problemática se o tomarmos como um literalista em relação à natureza dos objetos matemáticos. Motivado por preocupações semelhantes, Averróis acredita que o fato de o reino dos objetos matemáticos estar separado da realidade extramental faz com que a matemática desempenhe um papel menos significativo na perfeição humana do que a física e a metafísica (Endress 2003: 150).

Dúvidas sobre a capacidade da matemática de representar o mundo extramental com precisão são ainda mais prevalentes entre os atomistas (Dhanani 1994: 101-40; Pines 1936 [1997: 110]). Por exemplo, endossando o atomismo físico em seus trabalhos posteriores, Fakhr al-Dīn al-Rāzī acredita que, uma vez que as magnitudes são supostamente contínuas na geometria euclidiana, esta ciência não pode apresentar uma imagem precisa do mundo atomístico descontínuo (Setia 2006: 126-28).

Em seu *Al-Mawāqif*, al-ʾĪjī desafia a confiabilidade das ciências matemáticas devido ao seu envolvimento com entidades estimativas que são mais frágeis (*awhan*) do que uma teia de aranha. Essa analogia se refere ao Alcorão 29:41 (Fazlıoğlu 2014: 6-7). Uma visão similarmente cética da matemática é defendida por Shams al-Dīn Muḥammad al-Bukhārī (m. 1429) em seu comentário sobre *o Ḥikma al-ʿayn* de al-Kātibī al-Qazwīnī. Como muitos de seus predecessores, al-Bukhārī afirma que, comparada à física e à metafísica, a matemática é uma fonte menos confiável de conhecimento sobre as coisas concretamente existentes. É em resposta a tais visões que al-Jurjānī apela à maquinaria do *nafs al-ʾamr* para defender a confiabilidade da matemática. Ele aceita que objetos matemáticos são estimativos e imaginários. Mas ele acredita que eles são imaginados corretamente e de acordo com a realidade extramental. Nesse aspecto, eles são totalmente diferentes de entidades fictícias, como *montanhas de rubi* ou *homens de duas cabeças*, que não refletem nada na realidade extramental (Hasan 2017: 7). Embora a matemática se origine da estimativa, ela ainda pode expressar verdades significativas sobre as coisas como elas são no *nafs al-ʾamr*. Ele, portanto, acredita que o julgamento da estimativa pode, em princípio, estar em conformidade com o do intelecto; particularmente no contexto da matemática, onde os produtos da estimativa são construídos de acordo com o que percebemos do mundo extramental por meio de nossos sentidos. Embora objetos matemáticos sejam entidades estimativas, eles não são o resultado de uma imaginação fantasiosa que não tem conexão com a realidade, ou assim al-Jurjānī parece acreditar (Fazlıoğlu 2014; Hasan 2017). A teoria de *nafs al-ʾamr* foi, entre outras coisas, a tentativa mais promissora de pensadores muçulmanos de reconciliar uma explicação antirrealista da ontologia da matemática com uma explicação realista das verdades matemáticas. Essa teoria pretende fornecer uma explicação de como a matemática, como o estudo de entidades puramente estimativas, pode ser útil no estudo do mundo físico. Infelizmente, a extensão do sucesso desse projeto ainda não foi estudada de forma abrangente.

3. Conclusão

O que é apresentado aqui é apenas um breve relato das interessantes visões filosóficas que os pensadores muçulmanos medievais desenvolveram sobre matemática. Não é de forma alguma exaustivo. Muitos aspectos das visões que discuti aqui ainda não foram estudados na literatura secundária. Não é exagero dizer que a filosofia da matemática de muitos filósofos muçulmanos não foi suficientemente abordada pelos historiadores contemporâneos da filosofia. Mas espero que as coisas reunidas nesta entrada tenham mostrado que a tradição islâmica é um rico recurso para ideias e teorias inovadoras pertinentes à filosofia da matemática (e não – como geralmente se pensa – apenas aos aspectos técnicos da matemática).

4. Bibliografia

4.1 Fontes primárias

Abū al-Barakāt, *Al-Muʿtabar fī al-ḥikma*, ʿAbdallāh al-ʿAlawī al-Ḥaḍramī (ed.), Hyderabad: Dāʾira al-maʿārif al-ʿuthmānīya, 1939.

Avicenna, [*al-Burhān*], *al-Shifāʾ, al-Manṭiq, al-Burhān* (*Healing. Logic. Book of Demonstration*) [*Cura. Lógica. Livro da demonstração*], Abū l-ʿAlā ʿAfīfī (ed.), Cairo: al-Maṭbaʿa al-amīrīya, 1956.

–––, [Pointers] [Indicações], *Al-Ishārāt wa al-tanbihāt, al-Ṭabīʿīyāt, with Tūsī's Commentary at the Bottom of Page* (*Pointers and Reminders*), Sulaymān Dunyā (ed.), Cairo: Dār al-Maʿārif, 1957.

–––, *ʿUyūn al-ḥikma* (*Elements of Philosophy*) [*Elementos de filosofia*], A. Badawī (ed.), Beirut: Dār al-ʿIlm, 1980.

–––, *Al-Najāt*, Muhammad Taqī Danishpazhūh (ed.), Tehran: Tehran University Press, 1985.

–––, [Mph], *The Metaphysics of "The Healing"*, Michael E. Marmura (ed. and trans.), Provo, UT: Brigham Young University Press, 2005.

–––, *The Physics of "The Healing"*, 4 books. Translated in 2 volumes by Jon McGinnis (ed. and trans.), Provo, UT: Brigham Young University Press, 2009.

[Ph1], *Books I & II*

[Ph2], *Books III & IV*

Badawī, ʿAbd al-Raḥmān (ed.), 1947, *Al-muthul al-ʿaqlīya al-aflāṭūnīya*, Cairo: Printing House of the Egyption Library.

al-Bīrūnī, [Astro], *Art of Astrology: Kitāb al-tafhīm li-ʾawaʾil ṣināʿa al-tanjīm*, translated by R. Ramsay Wright, London: LUZAC & co., 1934.

–––, [Instr], *Kitāb al-tafhīm li-ʾawaʾil ṣināʿa al-tanǧīm* (*The Book of Instruction*) [*O livro da instrução*], Jalaluddin Homaei (ed.), Tehran: Anjuman āsār-e mellī, 1975.

Di Vincenzo, Silvia, 2021, *Avicenna, ›The Healing, Logic: Isagoge‹: A New Edition, English Translation and Commentary of the Kitāb al-Madḫal of Avicenna's Kitāb al-Šifāʾ*, Berlin: De Gruyter. doi:10.1515/9783110726565

Euclid, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated by Thomas Little Heath in 3 volumes, Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

al-Fārābi, 1890, *Alfārābi's Philosophische Abhandlungen*, F. Dieterici (ed.), Leiden: E. J. Brill. Arabic versions.

–––, [*Al-Manṭiq*], *Al-Manṭiq ʿinda al-Fārābī*, Majid Fakhry (ed.), Beirut: Dār al-mashriq, 1987.

–––, [Enum], *ʾIḥṣāʾ al-ʿulūm* (*Enumeration of the Sciences*) [*Enumeração das ciências*], Ali Bou-Melhem (ed.), Beirut: Dār wa maktaba al-hilāl, 1996.

al-Ghazālī, [*Maqāṣid*], *Maqāṣid al-falāsifa*, Maḥmūd Bījū (ed.), Damascus: Maṭbaʿa al-ṣabāḥ, 2000.

al-Ḥillī, Ibn al-Muṭahhar, *Nihāya al-marām fī ʿilm al-kalām*, Fāḍil al-ʿIrfān (ed.), Qum: Mu'assasa al-imām al-Ṣādiq, 1998.

al-Khwārizmī, *Kitāb al-jabr wa al-muqābala*, Ali Moustafa Musharrafa and Muhammad Mursi Ahmad (eds), Cairo: Maṭbaʿa Būl Bārbiya, 1937.

Ibn al-Haytham, [Doubts] [Dúvidas], *Kitāb fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fī al-ʾuṣūl wa sharḥ maʿānīh* (*Resolution of Doubts*), Fuat Sezgin (ed.), Frankfurt am Main: Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, 1985.

———, *Sharḥ musāḍarāt kitāb Uqlīdis*, Ahmed Azzab Ahmed (ed.), Cairo: Dār al-kutub wa al-wathāʾiq al-qawmīya, 2005.

Ibn ʿAdī, "Maqāla fī ghayr al-mutanāhī" ("Treatise on the Infinite") [Tratado sobre o infinito], in *Maqālāt Yaḥyā Ibn ʿAdī al-falsafīya*, Sahban Khalifat (ed.), Amman: The University of Jordan, 1988, 135–140.

al-Kātibī al-Qazwīnī, Najm al-Dīn, *Ḥikma al-ʿayn*, Ṣāliḥ Āydīn Bin ʿAbd al-Ḥamīd al-Turkī (ed.), Cairo, 2002.

McGinnis, Jon and David C. Reisman, 2007, *Classical Arabic Philosophy: An Anthology of Sources*, Indianapolis, IN: Hackett Publishing Company.

Mullā Ṣadrā, *Al-Shawāhid al-rubūbīya*, Sayyed Jalal al-Din Ashtiani (ed.), Mashhad: Mashhad University Press, 1982.

———, [*Asfār*], *Al-Ḥikma al-mutaʿāliya fī al-ʾasfār al-ʿaqliya al-arbaʿa*, Beirut: Dār iḥyā al-turāth al-ʿarabī, 1990.

———, *Sharḥ Al-Hidāya al-Athīrīya*, M. M. Fūlādkār (ed.), Beirut: Dār iḥyā al-turāth al-ʿarabī, 2001.

Nicomachus, *Kitāb al-madkhal ilā ʿilm al-ʿadad* (كتاب المدخل الى علم العدد, Introduction to Arithmetic), translation from the original Greek by Thābit Ibn Qurrah, Wilhelm Kutsch (ed.), Beirut, 1958.

al-Rāzī, Fakhr al-Dīn, 1987, *Al-Maṭālib al-ʿāliya fī ʿilm al-ʾilāhī*, Ahmad Hijazi al-Saqa (ed.), Cairo: Dār al-Kātib al-ʿArabī.

–––, 1992, *Al-Mabāḥith al-mashriqīya*, Qum: Bīdār.

–––, *Sharḥ ʿUyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt*, M. Hejazi and A. A. Saqa (eds), Tehran, 1994.

al-Samaw'al, *al-Bāhir fī al-jabr* (The splendid book on algebra) [O esplêndido livro sobre álgebra]. Critical edition as *Al-Bahir en Algèbre d'As-Samaw'al*, Salah Ahmad and Roshdi Rashed (eds), Damascus: Presses de l'Université de Damascus, 1972.

al-Shahrastānī, [*Summa philosophiae*], *The Summa Philosophiae of al-Shahrastānī: Kitāb nihāyatu l-iqdām fī ʿilmi ʾl-kalām*, Alfred Guillaume (ed.), London: Oxford University Press, 1937.

al-Sijzī, *Geometrical Treatise on Problem Solving*, Jan P. Hogendijk (ed.), Muhammad Bagheri (trans.), Tehran: Fatemi, 1996.

Suhrawardī, *The Philosophy of Illumination*, John Walbridge and Hossein Ziai (eds/), Provo, UT: Brigham Young University Press, 1999.

The Brethren of Purity, [Epistles], *Epistles of the Brethren of Purity: On Arithmetic and Geometry - An Arabic Critical Edition and English Translation Of Epistles 1 & 2*, Nader El-Bizri (ed./trans.), Oxford: Oxford University Press, 2012.

al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn, *Asās al-ʾiqtibās*, Mudarris Razavi (ed.), Tehran: Tehran University Press, 1948.

–––, *Talkhīṣ al-Muḥassal*, Beirut: Dār al-ʾaḍwāʾ, 1985.

4.2 Fontes secundárias

Adamson, Peter, 2004, "Non-Discursive Thought in Avicenna's Commentary on the Theology of Aristotle", in Interpreting Avicenna: Science and Philosophy in Medieval Islam, Proceedings of the Second Conference of the Avicenna Study

Group, Jon McGinnis and David Reisman (eds), Leiden: Brill, 87-111. doi:10.1163/9789047405818_008

———, 2007, Al-Kindī, Oxford: Oxford University Press. doi:10.1093/acprof:oso/9780195181425.001.0001

Al-Daffa', Ali Abdullah, 1977, The Muslim Contribution to Mathematics, London: Croom Helm.

Ardeshir, Mohammad, 2008, "Ibn Sīnā's Philosophy of Mathematics", in Rahman, Street, and Tahiri 2008: 43–62. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8_2

Arnzen, Rüdiger, 2011, Platonische Ideen in der arabischen Philosophie: Texte und Materialien zur Begriffsgeschichte von suwar aflatuniyya und muthul aflatuniyya, Berlin: De Gruyter. doi:10.1515/9783110259827

Avigad, Jeremy, 2007, "Philosophy of Mathematics", in The Edinburgh Companion to Twentieth-Century Philosophies, Constantin Boundas (ed.), Edinburgh: Edinburgh University Press, 234-251.

Baffioni, Carmela, 2022, "The 'Brethren of Purity' and the Pythagorean Tradition", in Caiazzo, Macris, and Robert 2022: 296–321. doi:10.1163/9789004499461_011

Benacerraf, Paul, 1973, "Mathematical Truth", The Journal of Philosophy, 70(19): 661–679. doi:10.2307/2025075

Benevich, Fedor, 2019, "A Rebellion Against Avicenna? Suhrawardī and Abū l-Barakāt on 'Platonic Forms' and 'Lords of Species'", Ishrāq: Islamic Philosophy Yearbook, 9: 23-53.

Berggren, 2016, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, second edition, New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4939-3780-6

Bertolacci, Amos, 2006, The Reception of Aristotle's Metaphysics in Avicenna's Kitāb al-Šifāʾ: A Milestone of Western Metaphysical Thought, (Islamic Philosophy, Theology, and Science 63), Leiden: Brill.

Besthorn, Rasmus O. and Johan L. Heiberg, 1893, Codex Leidensis 399, I: Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii; Arabice et Latine ediderunt notisque instruxerunt, Copenhagen: Libraria Gyldendaliana.

Black, Deborah L., 2013, "Rational Imagination: Avicenna on the Cogitative Power", in Philosophical Psychology in Arabic Thought and the Latin Aristotelianism of the Thirteenth Century, Luis Xavier López-Farjeat and Jörg Alejandro Tellkamp (eds), Paris: Vrin, 59-81.

–––, 2014, "How Do We Acquire Concepts? Avicenna on Abstraction and Emanation", in Debates in Medieval Philosophy: Essential Readings and Contemporary Responses, Jeffrey Hause (ed.), New York: Routledge, 126-144.

Brentjes, Sonja, 2022, "Nicomachean Number Theory in Arabic and Persian Scholarly Literature", in Caiazzo, Macris, and Robert 2022: 112-140. doi:10.1163/9789004499461_005

Caiazzo, Irene, Constantinos Macris, and Aurélien Robert (eds.), 2022, Brill's Companion to the Reception of Pythagoras and Pythagoreanism in the Middle Ages and the Renaissance, Leiden: Brill. doi:10.1163/9789004499461

Cleary, John J., 1994, "Emending Aristotle's Division of Theoretical Sciences", The Review of Metaphysics, 48(1): 33-70.

Davidson, Herbert A., 1992, Alfarabi, Avicenna, & Averroes, on Intellect: Their Cosmologies, Theories of the Active Intellect, and Theories of Human Intellect, New York: Oxford University Press.

De Smet, Daniel, 2022, "Pythagoras' Philosophy of Unity as a Precursor of Islamic Monotheism: Pseudo-Ammonius and Related Sources", in Caiazzo, Macris, and Robert 2022: 277–295. doi:10.1163/9789004499461_010

Dhanani, Alnoor, 1994, The Physical Theory of Kalām, Leiden: Brill.

———, 2015, “The Impact of Ibn Sīnā’s Critique of Atomism on Subsequent Kalām Discussions of Atomism”, Arabic Sciences and Philosophy, 25(1): 79-104. doi:10.1017/S0957423914000101

Eftekhari, Banafsheh, 2018, “The Inconsistency Between Geometrical Continuism and Kalām Atomism in Fakhr al-Dīn Rāzī”, Philosophy of Science (Iran), 8(15): 1-26. [Eftekhari 2018 disponível on-line]

———, 2019, “Fakhr Rāzī’s Theory of Motion in Interaction with Aristotelian Physics”, Philosophy of Science, 9(17): 125. [Eftekhari 2019 disponível on-line]

El-Bizri, Nader, 2018, “The Occult in Numbers: The Arithmology and Arithmetic of the Ikhwān al-Ṣafā”, in The Occult Sciences in Pre-Modern Islamic Cultures, Nader El-Bizri and Eva Orthmann (eds), Beirut: Orient-Institut / Würzburg: Ergon Verlag, 17-40.

Endress, Gerhard, 2003, “Mathematics and Philosophy in Medieval Islam”, in The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives, Jan P. Hogendijk and Abdelhamid I. Sabra (eds), Cambridge MA: The MIT Press, 121-176.

Fazlıoğlu, İhsan, 2014, “Between Reality and Mentality -Fifteenth Century Mathematics and Natural Philosophy Reconsidered-”, Nazariyat İslam Felsefe ve Bilim Tarihi Araştırmaları Dergisi (Journal for the History of Islamic Philosophy and Sciences), 1(1): 1-39. doi:10.15808/Nazariyat.1.1.M0001

Frege, Gottlob, 1884, Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau: w. Koebner; translated by J. L. Austin as The Foundations of Arithmetic: A Logic-Mathematical Enquiry into the Concept of Number, Oxford: Blackwell, second revised edition, 1953.

Goodman, Lenn Evan, 1992 [2006], Avicenna, London: Routledge. Updated edition, Ithaca, NY: Cornell University Press, 2006

Gutas, Dimitri, 2001, “Intuition and Thinking: The Evolving Structure of Avicenna’s Epistemology”, in Wisnovsky 2001, 1-38.

–––, 2003, “Medical Theory and Scientific Method in the Age of Avicenna”, in Before and After Avicenna: Proceedings of the First Conference of the Avicenna Study Group, David C. Reisman and Ahmed H. Al-Rahim (eds), Leiden: Brill, 145-162.

–––, 2012, “The Empiricism of Avicenna”, Oriens, 40(2): 391-436. doi:10.1163/18778372-00402008

–––, 2020, “The Myth of a Kantian Avicenna”, Philosophy East and West, 70(3): 833-840. doi:10.1353/pew.2020.0039

Hasan, Moiz, 2017, “Foundations of Science in the Post-Classical Islamic Era: The Philosophical, Historical, and Historiographical Significance of Sayyid Al-Sharīf Al-Jurjānī’s (d. 1413) Project”, PhD Dissertation, University of Notre Dame.

Hasse, Dag Nikolaus, 2001, “Avicenna on Abstraction”, in Wisnovsky 2001: 39-72.

Hussey, Edward, 1991, “Aristotle on Mathematical Objects”, Apeiron, 24(4): 105-133. doi:10.1515/APEIRON.1991.24.4.105

Ighbariah, Ahmad and Roy Wagner, 2018, “Ibn Al-Haytham’s Revision of the Euclidean Foundations of Mathematics”, HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science, 8(1): 62–86. doi:10.1086/695957

Kaş, Murat, 2021, “Apprehension and Existence, Appearance and Reality: The Reception of Nafs al-amr Debates after the 13th Century”, Ilahiyat Studies, 12(1): 7-39. doi:10.12730/13091719.2021.121.216

Kiankhah, Leila, 2015, “A Research on and a Critical Edition of ‘the Goals of Metaphysics’”, Sophia Prennis, 11(2): 119-157. [Kiankhah 2015 disponível on-line]

Lear, Jonathan, 1982, “Aristotle’s Philosophy of Mathematics”, The Philosophical Review, 91(2): 161-192. doi:10.2307/2184625

Lettinck, Paul, 1999, "Ibn Sina on Atomism: Translation of Ibn Sina's Kitab Al-Shifa, Al-Tabi'iyyat I: Al-Sama' Al-Tabi'i Third Treatise, Chapter 3-5", Al-Shajarah: Journal of the International Institute of Islamic Thought and Civilization (ISTAC), 4(1): 1-51.

Mancosu, Paolo, 2009, "Measuring the Size of Infinite Collections of Natural Numbers: Was Cantor's Theory of Infinite Number Inevitable?", The Review of Symbolic Logic, 2(4): 612-646. doi:10.1017/S1755020309990128

Marmura, Michael E., 1960, "Avicenna and the Problem of the Infinite Number of Souls", Mediaeval Studies, 22: 232-239. doi:10.1484/J.MS.2.305953

–––, 1980, "Avicenna on the Division of the Sciences in the 'Isagoge' of His 'Shifa'", Journal for the History of Arabic Science, 4(2): 239-251.

–––, 2005, "Translator's Introduction", in The Metaphysics of the Healing, Michael E Marmura (ed.), Provo, UT: Brigham Young University Press, xix-xxv.

–––, 2006, "Avicenna's Critique of Platonists in Book VII, Chapter 2 of the Metaphysics of His Healing", in Arabic Theology, Arabic Philosophy: From the Many to the One: Essays in Celebration of Richard M. Frank, James Montgomery (ed.), Louvain: Peeters Publishers, 355-369.

Marquet, Yves, 2006, Les "Frères de la pureté", Pythagoriciens de l'Islam: la marque du Pythagorisme dans la rédaction des épîtres des Iḫwān al-Ṣafā', Paris: S.E.H.A.

Masoumi Hamedani, Hossein, 2013, "The Theologian and the Mathematician: Fakhr al-Dīn al-Rāzī and the Geometrical Works of Ibn al-Haytham", Journal for the History of Science (Iran), 11(1): 139-157.

McGinnis, Jon, 2006, "A Penetrating Question in the History of Ideas: Space, Dimensionality and Interpenetration in the Thought of

Avicenna", Arabic Sciences and Philosophy, 16(1): 47-69. doi:10.1017/S0957423906000233

–––, 2010, "Avicennan Infinity: A Select History of the Infinite through Avicenna", Documenti e Studi Sulla Tradizione Filosofica Medieval, 21: 199-221.

–––, 2017, "Experimental Thoughts on Thought Experiments in Medieval Islam", in The Routledge Companion to Thought Experiments, Michael T. Stuart, Yiftach Fehige, and James Robert Brown (eds), London: Routledge, 77-91.

–––, 2018, "Mind the Gap: The Reception of Avicenna's New Argument against Actually Infinite Space", in Illuminationist Texts and Textual Studies: Essays in Memory of Hossein Ziai, Ali Gheissari, Ahmed Alwishah, and John Walbridge (eds.), Leiden: Brill, 272-305. doi:10.1163/9789004358393_015

–––, 2019, "A Continuation of Atomism: Shahrastānī on the Atom and Continuity", Journal of the History of Philosophy, 57(4): 595-619. doi:10.1353/hph.2019.0068

Morrison, Robert, 2014, "What Was the Purpose of Astronomy in Ījī's Kitāb al-Mawāqif fī ʿilm al-kalām?" in Politics, Patronage and the Transmission of Knowledge in 13th–15th Century Tabriz, Judith Pfeiffer (ed.), Leiden: Brill, 201-229. doi:10.1163/9789004262577_009

Mousavian, Seyed N. and Mohammad Ardeshir, 2018, "Avicenna on the Primary Propositions", History and Philosophy of Logic, 39(3): 201-231. doi:10.1080/01445340.2017.1408739

Mueller, Ian, 1970, "Aristotle on Geometrical Objects", Archiv Für Geschichte Der Philosophie, 52(2): 156-171. doi:10.1515/agph.1970.52.2.156

–––, 1990, "Aristotle's Doctrine of Abstraction in the Commentators", in Aristotle Transformed: The Ancient Commentators and Their

Influence, Richard Sorabji (ed.), Ithaca, NY: Cornell University Press, 463-480.

Nuseibeh, Sari, 1989, "Al-'Aql al-Qudsi: Avicenna's Subjective Theory of Knowledge", Studia Islamica, 69: 39-54. doi:10.2307/1596066

Pines, Shlomo, 1968, "Thābit b. Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite", Actes du XIe Congrès International d'Histoire des Sciences [1965], Sect. III: Histoire des Sciences Exactes (Astronomie, Mathématiques, Physique), Wroclaw, 160-166. Reprinted in The Collected Works of Shlomo Pines, volume 2, Leiden: Brill, 1986, 423-429.

–––, 1974, "Philosophy, Mathematics and the Concepts of Space in the Middle Ages", in The Interaction Between Science and Philosophy, Yehuda Elkana (ed.), Atlantic Highlands, NJ: Humanities Press, 75-90.

–––, 1936 [1997], Beiträge zur islamischen Atomenlehre, Berlin: Heine. Translated as Studies in Islamic Atomism, Tzvi Langermann (ed.), Michael Schwarz (trans.), Jerusalem: The Magnes Press, 1997.

Porro, Pasquale, 2011, "Immateriality and Separation in Avicenna and Thomas Aquinas", in The Arabic, Hebrew and Latin Reception of Avicenna's Metaphysics, Dag Nikolaus Hasse and Amos Bertolacci (eds), Berlin: De Gruyter, 275-307.

Rahman, Shahid, Tony Street, and Hassan Tahiri (eds.), 2008, The Unity of Science in the Arabic Tradition: Science, Logic, Epistemology and Their Interactions, Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8

Rashed, Marwan, 2009, "Thabit ibn Qurra sur l'existence et l'infini: les Rèponses aux questions posées par Ibn Usayyid", in Thābit ibn Qurra: Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad, Berlin: Walter de Gruyter, 619-674.

Rashed, Roshdi, 1984a, "Mathématiques et Philosophie Chez Avicenne", in Etudes Sur Avicenne, Jean Jolivet and Roshdi Rashed (eds), Paris: Les Belles Lettres, 29-39.

–––, 1984b [1994], Entre arithmétique et algèbre: recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Paris: Les Belles lettres. Translated as The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra, Angela F. W. Armstrong (trans.), Dordrecht: Springer, 1994.

–––, 1993, Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle: Ibn al-aytham, théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique, vol. 2, London: Al-Furqān.

–––, 1996 [2012], Fondateurs et commentateurs, volume 1 of Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation. Translated as Founding Figures and Commentators in Arabic Mathematics, volume 1 of A History of Arabic Sciences and Mathematics, Nader El-Bizri (ed.), Roger Wareham, Chris Allen, and Michael Barany (trans.), New York: Routledge, 2012. doi:10.4324/9780203636596

–––, 1999, "Al-Qūhī vs. Aristotle: On Motion", Arabic Sciences and Philosophy, 9(1): 7-24. doi:10.1017/S0957423900002587

–––, 2006 [2017], Ibn Al-Haytham: Astronomie, Géométrie sphérique et trigonométrie, volume 5 of Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation. Translated as Ibn Al-Haytham's Geometrical Methods and the Philosophy of Mathematics, volume 5 of A History of Arabic Sciences and Mathematics, J. V. Field (trans.), New York: Routledge. doi:10.4324/9781315168456

–––, 2008, "The Philosophy of Mathematics", in Rahman, Street, and Tahiri 2008: 153-182. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8_6

———, 2015, Classical Mathematics from Al-Khwarīzmī to Descartes, Michael H. Shank (trans.), New York: Routledge. doi:10.4324/9781315753867

———, 2016, "Avicenne, « philosophe analytique » des mathématiques", Les Études philosophiques, 2016/2(117): 283-306. doi:10.3917/leph.162.0283

———, 2018, "Avicenna: Mathematics and Philosophy", in The Philosophers and Mathematics, Hassan Tahiri (ed.), (Logic, Epistemology, and the Unity of Science 43), Cham: Springer International Publishing, 249-262. doi:10.1007/978-3-319-93733-5_11

———, 2019, "Ibn al-Haytham, Ibn Sīnā, al-Ṭūsī: Égalité ou congruence", Arabic Sciences and Philosophy, 29(2): 157-170. doi:10.1017/S0957423919000018

Rashed, Roshdi and Hélène Bellosta, 2000, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle, Leiden: Brill.

Rescher, Nicholas and Haig Khatchadourian, 1965, "Al-Kindi's Epistle on the Finitude of the Universe", Isis, 56(4): 426-433. doi:10.1086/350044

Sabra, Abdelhamid Ibrahim, 1989, The Optics of Ibn al-Haytham, London: The Warburg Institute.

———, 1997, "Thābit Ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles: Edition and Translation of His Discussions with Ibn Usayyid", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 11: 1-33.

———, 1998, "One Ibn al-Haytham or Two? An Exercise in Reading the Bio-Bibliographic Sources", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 12: 1-40.

———, 2003, "One Ibn al-Haytham or Two? Conclusion", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 15: 95-108.

Samian, A.L., 2011, "Reason and Spirit in Al-Biruni's Philosophy of Mathematics", in Reason, Spirit and the Sacral in the New

Enlightenment, Anna-Teresa Tymieniecka (ed.), Dordrecht: Springer Netherlands, 137-146. doi:10.1007/978-90-481-9612-8_9

———, 2014, "The Question of Divinity in Newton's and al-Biruni's Philosophies of Mathematics: A Comparative Perspective", in Islamic Philosophy and Occidental Phenomenology in Dialogue, Anna-Teresa Tymieniecka, Nazif Muhtaroglu, and Detlev Quintern (eds.), Dordrecht: Springer Netherlands, 113-123. doi:10.1007/978-94-007-7902-0_9

Setia, ʿAdī, 2006, "Atomism versus Hylomorphism in the Kalām of al-Fakhr al-Dīn al-Rāzī: A Preliminary Survey of the Maṭālib al-ʿaliyyah", Islam & Science, 4(2): 113-140. [Setia 2006 disponível on-line]

Shamsi, F.A., 1975, "Al-Kindi's Epistle: On What Cannot Be Infinite and of What Infinity May Be Attributed", Islamic Studies, 14(2): 123-144.

Spiker, Hasan, 2021, Things as They Are: Nafs Al-Amr & the Metaphysical Foundations of Objective Truth, Abu Dhabi: Tabah Research.

Tahiri, Hassan, 2016, Mathematics and the Mind: An Introduction into Ibn Sīnā's Theory of Knowledge, (SpringerBriefs in Philosophy), Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-25238-4

———, 2018, "The Foundations of Arithmetic in Ibn Sīnā", in The Philosophers and Mathematics, Hassan Tahiri (ed.), Cham: Springer, 297-314. doi:10.1007/978-3-319-93733-5_13

Walbridge, John, 2000, The Leaven of the Ancients: Suhrawardī and the Heritages of the Greeks, Albany, NY: State University of New York Press.

Wisnovsky, Robert (ed.), 2001, Aspects of Avicenna, Princeton, NJ: Markus Wiener.

Zarepour, Mohammad Saleh, 2016, "Avicenna on the Nature of Mathematical Objects", Dialogue: Canadian Philosophical Review, 55(3): 511-536. doi:10.1017/S0012217316000524

–––, 2019, "Avicenna against Mathematical Platonism", Oriens, 47(3-4): 197-243. doi:10.1163/18778372-04700100

–––, 2020a, "Avicenna's Notion of Fiṭrīyāt: A Comment on Dimitri Gutas' Interpretation", Philosophy East and West, 70(3): 819-833. doi:10.1353/pew.2020.0038

–––, 2020b, "Avicenna on Mathematical Infinity", Archiv Für Geschichte Der Philosophie, 102(3): 379-425. doi:10.1515/agph-2017-0032

–––, 2020c, "Non-Innate A Priori Knowledge in Avicenna", Philosophy East and West, 70(3): 841-848. doi:10.1353/pew.2020.0040

–––, 2021, "Avicenna on Grasping Mathematical Concepts", Arabic Sciences and Philosophy, 31(1): 95-126. doi:10.1017/S0957423920000090

Zhmud', Leonid Ja., 1989, "'All Is Number'? 'Basic Doctrine' of Pythagoreanism Reconsidered", Phronesis, 34(1-3): 270-292. doi:10.1163/156852889X00189

Ziai, Hossein, 1990, Knowledge and Illumination: A Study of Suhrawardī's Ḥikmat al-Ishrāq, Atlanta, GA: Scholars Press.

5. Ferramentas acadêmicas

Procure tópicos e pensadores relacionados a este verbete no Internet Philosophy Ontology Project (InPhO)

Bibliografia aprimorada para este verbete no PhilPapers, com links para seu banco de dados.